

## Finanzmathematik

### Kapitel 4

#### Investitionen

Prof. Dr. Harald Löwe

Sommersemester 2012

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

1. Abschnitt

# INVESTITIONSRECHNUNG

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Voraussetzungen

Investition als Zahlungsstrom

- Vom Investor zur leistende Zahlungen (Anschaffungen, Betriebskosten, ...) zählen negativ
- Eingenommene Gelder (Gewinne, ...) zählen positiv
- Insgesamt erhalte Zahlungsstrom der **Rückflüsse**
- Abrechnung hier stets mit US-Methode

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Kalkulationszinssatz

Zu verwendender Jahreszinssatz  $i$ :

### Kalkulationszinssatz

*Voraussetzung:* Geld kann am Geld- und Kapitalmarkt jederzeit zum Zinssatz  $i$  angelegt oder aufgenommen werden:  
Sollzins = Habenzins

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

4

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Vokabeln

- Investition „erfüllt das Deckungskriterium“:  
Summe aller unverzinsten Rückflüsse ist positiv (mehr Einnahmen als Ausgaben).
- Normalinvestition:
  - Deckungskriterium erfüllt
  - Nur erster Rückfluss negativ, alle anderen positiv

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

5

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Kapitalwertmethode

**Kapitalwert:** Barwert des Zahlungsstroms der Rückflüsse (verwende Kalkulationszinssatz)  
Berechnung durch Abzinsen der Rückflüsse  
Investitionen mit positivem Kapitalwert heißen **vorteilhaft**; die anderen **nachteilig**  
Kapitalwertmethode: Entscheidung für die Investition mit dem *höchsten* Kapitalwert.

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

6

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 1

Unsere Firma möchte einen neuen Fußballschuh am Markt platzieren. Für Produktion, Werbung usf. sind heute 100.000€ zu zahlen. Pro Jahr kosten Vertrieb, Lagerung etc. 20.000€ (Einmalzahlung zum Jahresende); im ersten Jahr wird ein Umsatz von 70.000€, im zweiten Jahr von 80.000€ erwartet. Nach den zwei Jahren ist die Investition abgeschlossen. Die Firma rechnet mit einem Kalkulationszinssatz von 5% p.a.

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

7

---

---

---

---

---

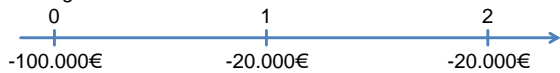
---

---

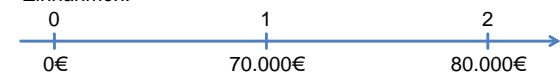
---

### Beispiel 1 / Rückflüsse

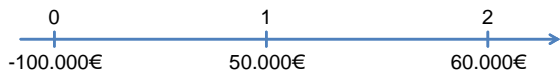
Ausgaben:



Einnahmen:



Rückflüsse:



Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

8

---

---

---

---

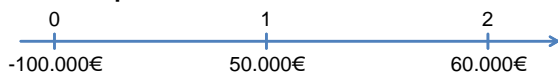
---

---

---

---

### Beispiel 1 / Normalinvestition



- Deckungskriterium erfüllt:  
 $-100.000€ + 50.000€ + 60.000€ = 10.000€$   
 ist positiv
- Investition ist Normalinvestition:  
 Erster Rückfluss negativ, alle anderen positiv

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

9

---

---

---

---

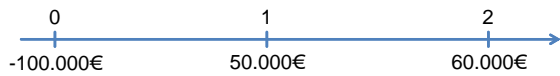
---

---

---

---

### Beispiel 1 / Kapitalwert



- Kapitalwert  $K$  = Barwert der Rückflüsse
- Verzinsung mit 5%p.a., jährliche Zinsbuchung  

$$K = -100.000€ + \frac{1}{1,05} \cdot 50.000€ + \frac{1}{1,05^2} \cdot 60.000€$$

$$K = 2.040,82€$$
- Investition ist vorteilhaft, da  $K$  positiv.

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 1 / Interpretation 1

- Vollständig fremdfinanzierte Investition
- Kreditzinssatz 5% p.a.
- Kreditsumme
  - 100.000€ für Investition
  - $K = 2.049,82€$  für den privaten Konsum
- Rückzahlungen
  - 50.000€ nach einem Jahr
  - 60.000€ nach zwei Jahren

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 1 / Interpretation 1 (Forts.)

Termin	t = 0	t = 1	t = 2
Rückfluss	-100.000,00€	50.000,00€	60.000,00€
Entnahme	-2.040,82€	-	-
Auszahlung (Kredit)	102.040,82€	-	-
Zinsen	0,00€	-5.102,04€	-2.857,14€
Tilgung	0,00€	-44.897,96€	-57.142,86€
<b>Saldo</b>	<b>0,00€</b>	<b>0,00€</b>	<b>0,00€</b>
Restschuld	102.040,82€	57.142,86€	<b>0,00€</b>

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 1 / Interpretation 1 (Forts.)

- Zu  $t = 0$  finanzielle Investition *und* Privatentnahme in Höhe des Kapitalwerts durch einen Kredit
- Zu  $t = 1 / 2$  zahle Kredit durch die Gewinne aus der Investition zurück
- Am Ende der Investition ist der Kredit getilgt: Kein eigenes Geld verwendet.
- Daher: Kapitalwert = „Sofortgewinn“ der Investition

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

13

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 1 / Interpretation 2

- Investition aus Eigenkapital
- Kontostand zu  $t = 0$ :
  - 100.000€ zur Investition
  - 2.040,82€ zum privaten Konsum
- Das Konto werde mit 5% p.a. verzinst.
- Kontostand nach 2 Jahren ohne Investition  
 $E = 1,05^2 \cdot 102.040,82€ = 112.500,00€$

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

14

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 1 / Interpretation 1 (Forts.)

Termin	t = 0	t = 1	t = 2
Rückfluss	-100.000,00€	50.000,00€	60.000,00€
Entnahme	-2.040,82€	-	-
Auszahlung	102.040,82€	-	-
Zinsen	0,00€	0,00€	2.500,00€
Einzahlung	0,00€	-50.000,00€	-62.500,00€
<b>Saldo</b>	<b>0,00€</b>	<b>0,00€</b>	<b>0,00€</b>
Kontostand	0,00€	50.000,00€	<b>112.500,00€</b>

Alle Rückflüsse und Zinsen werden sofort auf dem Konto angelegt

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

15

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 1 / Interpretation 2 (Forts.)

- Kontostand nach 2 Jahren ebenfalls 112.500€
- Aber zusätzliche Entnahme des Kapitalwerts zu  $t = 0$
- Wieder: Kapitalwert = „Sofortgewinn“ der Investition

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

16

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 2

Zu investierender Betrag: 200.000€

Kalkulationszinssatz: 6% p.a.

Investitionsalternativen (Termine in Jahren):

I. -180.000€ ( $t=0$ ), 100.000€ ( $t=1/2$ ), 120.000€ ( $t=1$ ).

II. -120.000€ ( $t=0$ ), 6-malige halbjährliche Rente mit Rate 25.000€

III. -70.000 ( $t=0$ ), 90.000 ( $t=1$ )

Alle Investitionen sind Normalinvestitionen.

Halbjahresaufzinsungsfaktor:  $q_p = 1,03$

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

17

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 2 / Lösung

Investitionsbetrag / Kapitalwerte

$$I_I = -180.000€$$

$$K_I = -180.000€ + \frac{1}{q_p} \cdot 100.000€ + \frac{1}{q_p^2} \cdot 120.000€ = 30.198,89€$$

$$I_{II} = -120.000€$$

$$K_{II} = -120.000€ + \frac{1}{q_p} \cdot \frac{q_p^6 - 1}{q_p - 1} \cdot 25.000€ = 15.429,79€$$

$$I_{III} = -70.000€$$

$$K_{III} = -70.000€ + \frac{1}{q_p^2} \cdot 90.000€ = 14.833,63€$$

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

18

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 2 / Lösung (Forts.)

- Investition II und III können gemeinsam durchgeführt werden; Investition I nur alleine.
- Kapitalwert von Investition II und III = Summe der Kapitalwerte:  
 $I_{II+III} = -120.000€ - 70.000€ = -190.000€$   
 $K_{II+III} = K_{II} + K_{III} = 30.263,42€ > K_I = 30.198,89€$
- Bevorzuge Investition II+III.

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

19

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Methode des internen Zinssatzes

Der Effektivzinssatz (hier: US) des Zahlungsstroms der Rückflüsse heißt **interner Zinssatz** oder **Rendite** der Investition.

Ist dieser größer als der Kalkulationszinssatz, so ist die Investition vorteilhaft, sonst nachteilig.

Bei mehreren Investitionsmöglichkeiten nimmt man die mit der höchsten Rendite.

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

20

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Ansatzgleichung

Kapitalwert (Barwert / Summe aller abgezinsten Rückflüsse) = 0€ bei Verwendung des internen Zinssatzes.

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

21

---

---

---

---

---

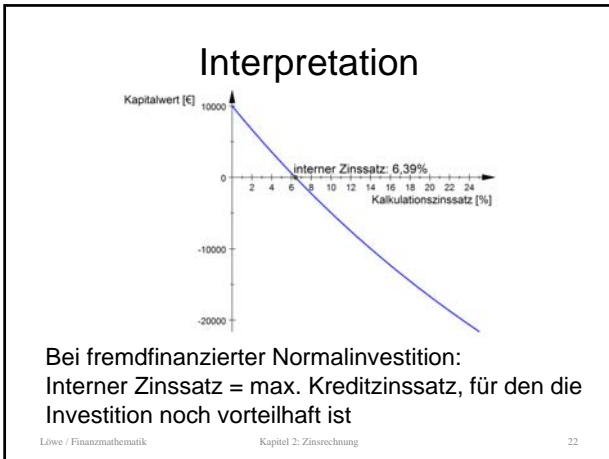
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Typische Klausuraufgabe

Zur Investition von 2 Mio.€ schlägt unsere Finanzabteilung eine Beteiligung an einem PR-Unternehmen vor und hat (bei einem Kalkulationszinssatz von 7% p.a. und einer Laufzeit von 10 Jahren) den Kapitalwert von 315.000€ bereits berechnet.

Alternativ bietet sich die Beschaffung und Vermietung eines neuen Serverparks an: Hier erhält unsere Firma über 6 Jahre 500.000€ pro Jahr.

Treffen Sie eine Investitionsentscheidung nach der Kapitalwertmethode und stellen Sie die Gleichung für den internen Zinssatz der zweiten Alternative auf. (Zinsbuchung erfolgt jährlich.)

Löwe / Finanzmathematik      Kapitel 2: Zinsrechnung      23

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lösung

- Jährliche Zahlungen, also jährliche Verzinsung; Aufzinsungsfaktor  $q = 1,07$ .
- Kapitalwert der ersten Anlage:  

$$K_I = 315.000\text{€}$$
- Kapitalwert der zweiten Anlage:  

$$K_{II} = -2.000.000\text{€} + \frac{1}{1,07^6} \cdot \frac{1,07^6 - 1}{0,07} \cdot 500.000\text{€} = 383.269,83\text{€}$$
- Entscheidung für Alternative II.

Löwe / Finanzmathematik      Kapitel 2: Zinsrechnung      24

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



### Lösung (Forts.)

$$K_{II} = -2.000.000\text{€} + \frac{1}{1,07^6} \cdot \frac{1,07^6 - 1}{0,07} \cdot 500.000\text{€} = 383.269,83\text{€}$$

i = interner Zinssatz; q = 1+i; Ansatzgleichung:

$$0\text{€} = -2.000.000\text{€} + \frac{1}{q^6} \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} \cdot 500.000\text{€}$$

**In der Klausur ist hier Schluss!**

---

---

---

---

---

---

---

---

2. Abschnitt

## FESTVERZINSLICHE WERTPAPIERE

---

---

---

---

---

---

---

---

### Festverzinsliche Wertpapiere

- Herausgeber: Nationen, Unternehmen
- „Nennwert“ hier immer 100€
- Schuldverschreibung mit garantierten Rückzahlungen
  - über Laufzeit = n Jahre
  - jährlich nachschüssig **Kuponzahlung**: p% des Nennwerts (gibt andere Wertpapiere)
  - am Ende der Laufzeit **Rücknahmekurs**: C% des Nennwerts

---

---

---

---

---

---

---

---

## Preis

- Nach Emission (Ausgabe) sind die Papiere an der Börse handelbar
- Preis ist abhängig von
  - noch *ausstehende* Zahlungen
  - Risiko des Papiers
- Käufer will mit dem Papier eine Rendite erzielen, die mindestens so groß wie bei vergleichbaren Papieren ist.

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

28

---

---

---

---

---

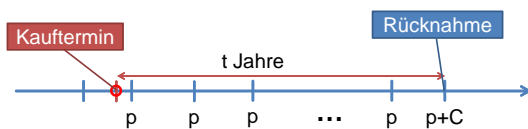
---

---

---

## Preis (Forts.)

- Restlaufzeit = t Jahre
- Anzahl noch ausstehender Kuponzahlungen:  
 $\lceil t \rceil$  = kleinste ganze Zahl  $\geq t$



Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

29

---

---

---

---

---

---

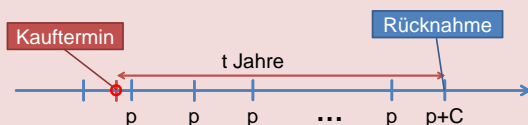
---

---

## Preis eines Papiers

Restlaufzeit t Jahre, Rendite i  
 Preis P berechnet sich zu

$$P = \frac{1}{q^t} \cdot \left( \frac{q^{\lceil t \rceil} - 1}{q - 1} \cdot p + C \right)$$



Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

30

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 1

Wertpapier mit  $p = 6$ ,  $C = 100$  („Rücknahme zum Nennwert“), Restlaufzeit 7 Jahre 5 Monate, Rendite 6,34% p.a.

Anzahl ausstehender Kupons:  $\lceil 7 + \frac{5}{12} \rceil = 8$

$$\text{Preis } P = \frac{1}{1,0634^{7+\frac{5}{12}}} \cdot \left( \frac{1,0634^8 - 1}{0,0634} \cdot 6 + 100 \right)$$

$$P = 101,49$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 1 (Forts.)

Bei einem Preis von 105 ergibt sich die Rendite  $i$  (mit  $q = 1 + i$ ) aus der Gleichung

$$105 = \frac{1}{q^{7+\frac{5}{12}}} \cdot \left( \frac{q^8 - 1}{q} \cdot 6 + 100 \right)$$

**Hier ist in der Klausur Schluss!**

---

---

---

---

---

---

---

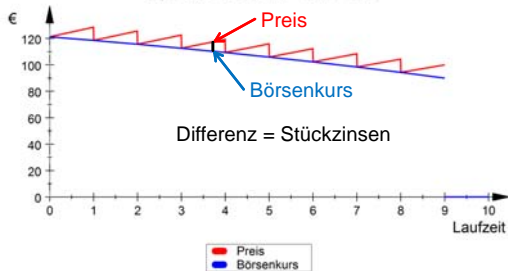
---

---

---

### Stückzinsen

9-jähriger Bond,  $p=10$ ,  $C=90$



Rendite: 6% p.a.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Stückzinsen (Forts.)

- Börse / Handelsblatt notieren nicht den Preis, sondern den **Börsenkurs**.
- Preis  $P =$  Börsenkurs  $B +$  Stückzinsen  $S$



- Stückzinsen:  $S = (\lceil t \rceil - t) \cdot p$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 2

Bond mit  $p = 10$ ,  $C = 90$ ,  $i = 0,03$   
 Restlaufzeit 17 Jahre, 3 Monate

$$t = 17 + \frac{3}{12}; \lceil t \rceil = 18; \lceil t \rceil - t = \frac{9}{12}$$

$$\text{Preis: } P = \frac{1}{1,03^{17 + \frac{3}{12}}} \cdot \left( \frac{1,03^{18} - 1}{0,03} \cdot 10 + 90 \right) = 194,67$$

$$\text{Stückzinsen: } S = \frac{9}{12} \cdot 10 = 7,50$$

$$\text{Börsenkurs: } B = P - S = 187,17$$

---

---

---

---

---

---

---

---

Dritter Abschnitt

## ZINSSTRUKTUR

---

---

---

---

---

---

---

---

## Rendite von Zerobonds

Zerobond mit Laufzeit  $t$  Jahren, Preis  $P$ ,  
Rücknahme zu 100 (Nennwert), Rendite  $r$ :

$$P = \frac{C}{(1+r)^t}, \text{ also } r = \left(\frac{C}{P}\right)^{1/t}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Finanzierungsschätze

Beispiel: 500 € Nennwert bei ein- bzw. zweijährigem  
Finanzierungsschatz mit beispielhaftem Verkaufszinssatz

Anlagezeitraum	1 Jahr	2 Jahre
<b>Verkaufszinssatz</b>	0,74 %	1,23 %
<b>Sie zahlen ein</b>	496,30 €	487,70 €
<b>Sie erhalten am Fälligkeitstag</b>	500,00 €	500,00 €
<b>Ihr Zinsertrag</b>	3,70 €	12,30 €
<b>Ihre Rendite pro Jahr</b>	0,75 %	1,25 %

---

---

---

---

---

---

---

---

## Rechnung zum einjährigen Finanzierungsschatz

Nennwert 500€, Verkaufszinssatz 0,74%  
Preis = Nennwert abzüglich Disagio in Höhe  
des Verkaufszinssatzes:

$$P = (1 - 0,0074) \cdot 500€ = 496,30€$$

Rendite:

$$r_{01} = \frac{500}{496,30} - 1 = 0,0075 = 0,75\%$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Rechnung zum zweijährigen Finanzierungsschatz

Nennwert 500€, Verkaufszinssatz 1,23%  
Preis = Nennwert abzüglich Disagio in Höhe des doppelten Verkaufszinssatzes:

$$P = (1 - 2 \cdot 0,0123) \cdot 500\text{€} = 487,70\text{€}$$

Rendite:

$$r_{02} = \left( \frac{500}{487,70} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,0125 = 1,25\%$$

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

40

---

---

---

---

---

---

---

---

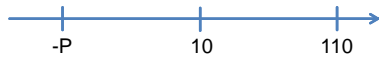
---

---

### Beispiel 1

Betrachte nun *zusätzlich* einen Bond mit Kupon 10, Rücknahme zum Nennwert 100 sowie einer Restlaufzeit von genau zwei Jahren.

Was ist ein „fairer Preis“ für diesen Bond?



Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

41

---

---

---

---

---

---

---

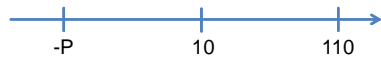
---

---

---

### Beispiel 1 (Forts.)

Rendite des Bonds = Rendite des zweijährigen Finanzierungsschatzes = 1,25%



$$P = \frac{1}{1,0125} \cdot 10 + \frac{1}{1,0125^2} \cdot 110 = 117,18$$

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

42

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 1 (Forts.)

Zahlungsstrom für 50 Bonds:



Zahlungsstrom für 1 einjrg. und 11 zweijrg. Finanzierungsschätze:



Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

43

---

---

---

---

---

---

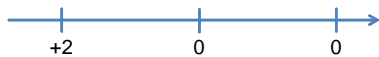
---

---

### Beispiel 1 (Forts.)

Zahlungsstrom des Geschäfts:

- verkaufe 1 einjrg. Finanzierungsschatz
- verkaufe 11 zweijrg. Finanzierungsschätze
- kaufe 50 Bonds



Sofortgewinn ohne Kapitaleinsatz!

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

44

---

---

---

---

---

---

---

---

### Das No-Arbitrage-Prinzip

**Arbitrage:** Sofortiger Gewinn ohne Kapitaleinsatz durch Kombination von Anlagemöglichkeiten.

**No-Arbitrage-Prinzip:** Der Markt gestattet keine Arbitrage.

Preise werden daher so ermittelt, dass keine Arbitrage-Möglichkeiten vorhanden sind.

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

45

---

---

---

---

---

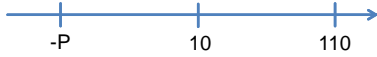
---

---

---

### Beispiel 1 (Forts.)

Zurück zum Bond:



Analyse: Arbitrage ist nur bei dem wie folgt berechneten Barwert ausgeschlossen:

$$P = \frac{1}{r_{01}} \cdot 10 + \frac{1}{r_{02}^2} \cdot 110$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Spot-Raten (Zero-Zinsen)

Die **Spot-Rate**  $r_{0t}$  für  $t$  Jahre ist die (durchschnittliche) Rendite eines Zerobonds mit Laufzeit  $t$  im betrachteten Marktsegment.

Auftragen der Spot-Raten in Abhängigkeit von  $t$  ergibt die **Zinsstrukturkurve**.

Die Zinsstrukturkurve des deutschen „Rentenmarks“ wird von der Bundesbank geschätzt und veröffentlicht.

---

---

---

---

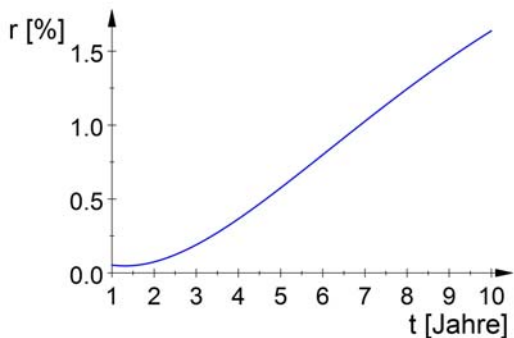
---

---

---

---

### Zinsstrukturkurve 11/05/12




---

---

---

---

---

---

---

---



## Diskontierungsfunktion

Einfacher zu verwenden:

**Diskontierungsfaktor**  $D(t)$  für  $t$  Jahre mit

$$D(t) = \frac{1}{(1 + r_{0t})^t}$$

Dabei ist  $r_{0t}$  die Spot-Rate für  $t$  Jahre.

Also: Preis  $P$  eines Zerobonds mit  $t$  Jahren Restlaufzeit und Rücknahme  $C$  beträgt

$$P = D(t) \cdot C$$

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

49

---

---

---

---

---

---

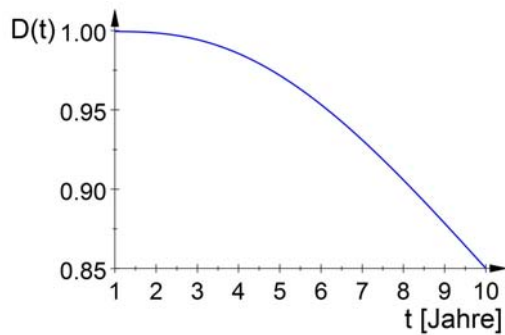
---

---

---

---

## Diskontierungsfunktion 11/05/12



Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

50

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Barwerte

**Barwert** eines Zahlungsstroms bei gegebener Zinsstrukturkurve bestimmen:

- Zinse in  $t$  Jahren fällige Zahlung auf heute ab; verwende hierbei die Spot-Rate  $r_{0t}$
- Addiere alle abgezinste Beträge zum Barwert

**Notiz:** Barwert = Preis des Zerobond-Portfolios mit den gleichen Zahlungen

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

51

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Beispiel 2

Jahre	1	2	3	4	5
Spot-Rate	1%	1,5%	2%	3%	4,5%

Preis eines Bonds mit Kupon 10,  
Rücknahme zu 100, Restlaufzeit 5 Jahre:

$$P = \frac{10}{1,01} + \frac{10}{1,015^2} + \frac{10}{1,02^3} + \frac{10}{1,03^4} + \frac{110}{1,045^5}$$

$$P = 126,19$$

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

52

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Beispiel 2 (Forts.)

Mit dem Preis ermittelt man die Rendite i:

$$126,19 = \frac{1}{(1+i)^5} \cdot \left( \frac{(1+i)^5 - 1}{i} \cdot 10 + 100 \right)$$

$$i = 0,041 = 4,1\%$$

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

53

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Beispiel 3

Die derzeitigen Spot-Raten sind:

Jahre	1	2	3	4	5
Spot-Rate	4%	4,5%	6%	5,5%	5%

(gebuckelte Zinsstrukturkurve)

In  $\frac{1}{2}$  Jahr erwarten wir eine flache  
Zinsstrukturkurve  $r_{0t} = 0,05$  für alle t.

Sie wollen 100.000€ in 1-, 2- und 5-jhrg.  
Zerobonds anlegen.

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

54

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 3 (Forts.)

Preise für Zerobonds mit Nennwert 100

Laufzeit	1	2	3	4	5
Preis	96,15	91,57	83,96	80,72	78,35

Anmerkung: Preis =  $100 \times D(t)$

Anteile 1-jhrg. Zerobond je 100 insgesamt: A

Anteile 2-jhrg. Zerobond je 100 insgesamt: B

Anteile 5-jhrg. Zerobond je 100 insgesamt: C

$$96,15 \times A + 91,57 \times B + 78,35 \times C = 100.000$$

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

55

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 3 (Forts.)

Preise nach  $\frac{1}{2}$  Jahr (alle mit 5% Rendite)

Laufzeit	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
Preis	97,59	92,94	***	***	80,29

Wert des Portfolios:

$$97,59 \times A + 92,94 \times B + 80,29 \times C$$

Diesen möchten wir möglichst hoch haben!

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

56

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 3 (Forts.)

Ansatz:

$$97,59 \cdot A + 92,94 \cdot B + 80,29 \cdot C = \max$$

$$96,15 \cdot A + 91,57 \cdot B + 78,35 \cdot C = 100.000$$

$$A, B, C \geq 0$$

Auflösen der 2. Gleichung und Einsetzen:

$$102476,07 - 0,8973 \cdot B - 0,9407 \cdot A = \max$$

A = B = 0 und C = 1276,32 führt auf Wert

102.476,07€ in  $\frac{1}{2}$  Jahr; Rendite beträgt

5,01% p.a. – mehr geht nicht!

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

57

---

---

---

---

---

---

---

---

## Bestimmung von Spot-Raten

Problem: Zerobonds gibt es nicht mit beliebigen Laufzeiten

Lösung: Geschicktes Rechnen mit Bonds

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

58

---

---

---

---

---

---

---

---

## Beispiel 4

Am Markt vorhanden (Nennwert 100, Rücknahme zu 100)

- 1-jhrg Zerobond; Preis 96,15
- 2-jhrg Bond mit Kupon 10; Preis 109,39
- 3-jhrg Bond mit Kupon 4; Preis 96,04

Gesucht sind die Spot-Raten für 1, 2 und 3 Jahre.

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

59

---

---

---

---

---

---

---

---

## Beispiel 4 (Forts.)

- Offenbar ist

$$r_{01} = \frac{100}{96,15} - 1 = 0,04 = 4\%$$

- Weiterhin gilt

$$109,39 = \frac{10}{1,04} + \frac{110}{(1+r_{02})^2}$$

$$r_{02} = 0,05 = 5\%$$

Löwe / Finanzmathematik

Kapitel 2: Zinsrechnung

60

---

---

---

---

---

---

---

---

### Beispiel 4 (Forts.)

- Außerdem

$$96,04 = \frac{4}{1,04} + \frac{4}{1,05^2} + \frac{104}{(1+r_{03})^2}$$
$$r_{03} = 0,0557 = 5,57\%$$

---

---

---

---

---

---

---

---