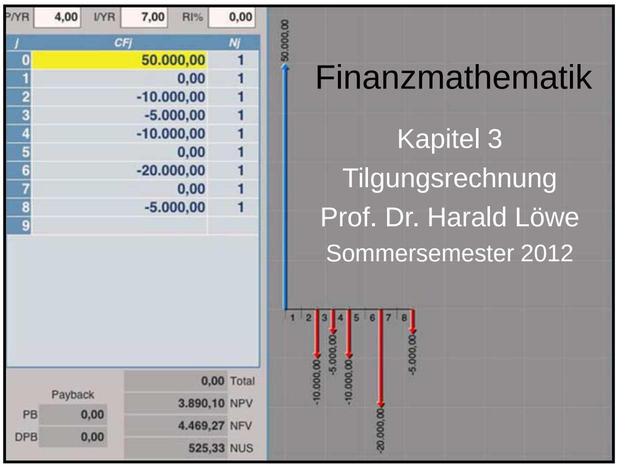


Finanzmathematik

Kapitel 3

Tilgungsrechnung

Prof. Dr. Harald Löwe

Sommersemester 2012

Abschnitt 1

HYPOTHEKENDARLEHEN

Festlegungen im Kreditvertrag

Der Kreditvertrag legt u.a. folgende Daten fest

- Kreditsumme K
- Auszahlungsbetrag [siehe „Disagio"]
- Laufzeit (Zinsbindungsfrist)
- Nominalzinssatz
  (mit diesem rechnet die Bank)
- Kontoführungsmethode
  (danach wird abgerechnet)
- Zu zahlende Raten oder „Tilgungssatz"

Hypothekendarlehen

Merkmal:

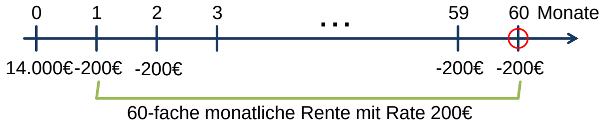
Die zu zahlende Rate ist konstant,
d.h. die Rückzahlungen bilden eine Rente.

Eventuelle Ausnahme:
Die letzte Rate kann kleiner sein (irreguläre Schlussrate).

Beispiel 1

- Kreditsumme (Anfangsschuld): 14.000€
- Monatliche Rate: 200€, beginnend einen Monat nach der Auszahlung
- Nominalzinssatz 6% p.a.
- US-Methode mit monatlicher Zinsbuchung.
- Laufzeit: 5 Jahre
- Gesucht: Restschuld am Ende der Laufzeit (Kreditkontostand am Tag der letzten Rate).

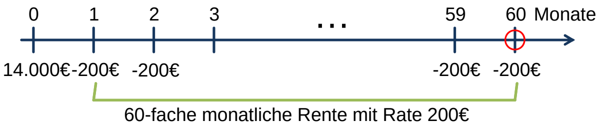
Beispiel 1 / Lösung



- US-Methode $q_p = 1 + \frac{0{,}06}{12} = 1{,}005$
- Rentenperiode = 1 Monat: $q_{Rente} = q_p$
- Rentenformel für Rentenendwert:

$$E_{Rente} = \frac{q_p^{60} - 1}{q_p - 1} \cdot 200€$$

Beispiel 1 / Lösung (Forts.)



Restschuld = aufgezinste Anfangsschuld – Gesamtwert aller Zahlungen

$$K_{Rest} = q_p^{60} \cdot 14.000€ - \frac{q_p^{60} - 1}{q_p - 1} \cdot 200€ = 4.929{,}90€$$

Beispiel 1 / Sondertilgungen

Wie hoch ist die Restschuld, wenn mit jeder 12. Rate (beginnend mit der 4. Rate) zusätzlich 500€ als Sondertilgung gezahlt werden?

Beispiel 1 / Sondertilgungen (Forts.)

- Neue Restschuld = alte Restschuld – Wert der Sondertilgungen am Ende des 60. Monats.
- Sondertilgungen: 5-malige *jährliche* Rente mit Rate 500€; letzte Rate 4 + 4 x 12 = 52 Monate nach Laufzeitbeginn, also 8 Monate vor Stichtag = Laufzeitende

Beispiel 1 / Sondertilgungen (Forts.)

- Rentenperiode = 1 Jahr = 12 Monate

$$q_{Rente} = q_p^{12}$$

- Rentenendwert (8 Monate vor Stichtag)

$$E_{ST} = \frac{q_{Rente}^5 - 1}{q_{Rente} - 1} \cdot 500€ = \frac{q_p^{60} - 1}{q_p^{12} - 1} \cdot 500€ = 2.828€$$

- Wert am Stichtag = Laufzeitende

$$W_{ST} = q_p^8 \cdot E_{ST} = 2.943{,}12€$$

Beispiel 1 / Sondertilgungen (Forts.)

- Restschuld am Ende der Laufzeit

$$K_{Rest} = 4.929{,}90€ - 2.943{,}12€ = 1.986{,}78€$$

- Vollständiger Ansatz:

$$K_{Rest} = q_p^{60} \cdot 14.000€ - \frac{q_p^{60} - 1}{q_p - 1} \cdot 200€ - q_p^8 \cdot \frac{q_p^{60} - 1}{q_p^{12} - 1} \cdot 500€$$

Beispiel 1 / Tilgungsplan

M.	Restschuld (Beginn)	Zinsen	Tilgung	Zahlung	Restschuld (Ende)
1	14.000,00 €	70,00 €	130,00 €	200,00 €	13.870,00 €
2	13.870,00 €	69,35 €	130,65 €	200,00 €	13.739,35 €
3	13.739,35 €	68,70 €	131,30 €	200,00 €	13.608,05 €
4	13.608,05 €	68,04 €	631,96 €	**700,00 €**	12.976,09 €
5	12.976,09 €	64,88 €	135,12 €	200,00 €	12.840,97 €
6	12.840,97 €	64,20 €	135,80 €	200,00 €	12.705,17 €
			...		
55	3.107,48 €	15,54 €	184,46 €	200,00 €	2.923,01 €
56	2.923,01 €	14,62 €	185,38 €	200,00 €	2.737,63 €
57	2.737,63 €	13,69 €	186,31 €	200,00 €	2.551,32 €
58	2.551,32 €	12,76 €	187,24 €	200,00 €	2.364,07 €
59	2.364,07 €	11,82 €	188,18 €	200,00 €	2.175,89 €
60	2.175,89 €	10,88 €	189,12 €	200,00 €	1.986,77 €

Sprachregelung

- Zerlege Zahlung in Zinsanteil plus „Tilgungsanteil“, wobei:
- **Tilgung** = Zahlung – gebuchte Zinsen
- neue Restschuld
  = alte Restschuld – Tilgung

Spalten des Tilgungsplans

- Monat (bzw. Quartal / Halbjahr …)
- Restschuld Anfang des Monats
- Zinsen für den Monat
- Bei Bedarf: Zinsbuchung am Ende des Monats
- Tilgung in diesem Monat
- Zahlung am Ende des Monats
- Restschuld am Ende des Monats

Beispiel 2 / Tilgungssatz

- Anfangsschuld: 70.000€
- Nominalzins 6% p.a.
- Monatliche Zinsbuchung; monatliche Raten (US-Methode)
- Tilgungssatz 2%
  (Formulierung im Kreditvertrag: „2% Tilgung pro Jahr zzgl. ersparter Zinsen“)
- Laufzeit 10 Jahre

Beispiel 3 / Rechnung der Bank

- Nominalzins 6% p.a.: $i = 0{,}06$
- Tilgungssatz 2%: $j = 0{,}02$
- Anfangsschuld $K = 70.000€$
- „Jährliche Rate“:
  $$(0{,}06 + 0{,}02) \cdot 70.000€ = 5.600€$$
- Gleichmäßig auf Monate aufgeteilt
  $$R_{\text{Monat}} = \frac{5.600€}{12} = 466{,}67€$$

Tilgungssatz

- Nominalzins i
- Tilgungssatz j
- Anfangsschuld K
- m Raten pro Jahr

Dann beträgt die zu zahlende Rate R

$$R = \frac{i + j}{m} \cdot K$$

Tilgungssatz (Forts.)

Beachte:

Jahreszinssatz

Tilgungssatz

$$R = \frac{i + j}{m} \cdot K$$

Anfangsschuld

Rate

Anzahl Zahlungen pro Jahr

Diese Rate bleibt während der gesamten Laufzeit konstant!

Beispiel 3 / Bemerkung

- Eigentliches Ziel: Restschuld nach einem Jahr um 2% gesunken
- Aber Rechnung ohne Einberechnung der Zinseszinseffekte, also nur ungefähr richtig
- Restschuld nach einem Jahr:

$$q_p = 1 + \frac{0{,}06}{12} = 1{,}005$$

$$K_{1Jahr} = q_p^{12} \cdot 70.000€ - \frac{q_p^{12} - 1}{q_p - 1} \cdot 466{,}67€ = 68.560{,}81€$$

Beispiel 3 / Bemerkung (Forts.)

- Dagegen: 70.000€ abzgl. 2% = 68.600€
- Ansatz für „richtige“ Rate R:

$$68.600€ = q_p^{12} \cdot 70.000€ - \frac{q_p^{12} - 1}{q_p - 1} \cdot R$$

- R = 463,49€
- Aber: Die Rechenmethode der Bank gilt laut Kreditvertrag!

Beispiel 4

Der 40-jährige Steueramtmann Heinz-Egon Hubert möchte als Investition ein Mehrfamilienhaus für 750.000€ kaufen. Hierzu benötigt er einen Kredit über 200.000€; gewünscht wird eine 10-jährige Zinsbindung und 2% anfängliche Tilgung.

Die comdirekt-Bank verlangt für diesen Kredit 3,94% p.a. Zinsen (Stand 2011); abgerechnet wird nach der US-Methode.

Beispiel 4 / Monatsrate

i = 0,0394, j = 0,02, m = 12

K = 200.000€

Damit ergibt sich die Monatsrate R zu

$$R = \frac{0{,}0394 + 0{,}02}{12} \cdot 200.000€ = 990€$$

Beispiel 4 / Restschuld

Restschuld nach 10 Jahren: $q_p = 1 + \frac{0{,}0394}{12}$

$$K_{Rest} = q_p^{120} \cdot 200.000€ - \frac{q_p^{120} - 1}{q_p - 1} \cdot 990€$$

$$K_{rest} = 151.071{,}70€$$

Bemerkung: Die Bank hatte 151.564,06€ berechnet…

Beispiel 4 / Zusatzfrage

Wie lange dauert es bis zur vollständigen Tilgung des Kredits, wenn der Zinssatz durchweg bei 3,94% p.a. liegt?

Ansatzgleichung
(Restschuld = 0 nach n Raten)

$$q_p^n \cdot 200.000€ - \frac{q_p^n - 1}{q_p - 1} \cdot 990€ = 0€$$

Beispiel 4 / Zusatzfrage (Forts.)

$$0€ = q_p^n \cdot 200.000€ - \frac{q_p^n - 1}{q_p - 1} \cdot 990€$$

$$0 = q_p^n \cdot 200.000 - (q_p^n - 1) \cdot 301.522,84$$

$$0 = 301.522,84 - 101.522,84 \cdot q_p^n$$

$$q_p^n = \frac{301.522,84}{101.522,84} = 2,97$$

$$n = \frac{\log(2,97)}{\log(q_p)} \approx 332,09$$

Beispiel 4 / Zusatzfrage (Forts.)

Interpretation des Ergebnisses n = 332,09

- 332 Raten sind zu wenig: Restschuld

$$K_{332} = q_p^{332} \cdot 200.000€ - \frac{q_p^{332} - 1}{q_p - 1} \cdot 990€ = +84,69€$$

- 333 Raten sind zu viel: Restschuld

$$K_{333} = q_p^{333} \cdot 200.000€ - \frac{q_p^{333} - 1}{q_p - 1} \cdot 990€ = -905,03€$$

Beispiel 4 / Zusatzfrage (Forts.)

Lösung: Bezahle 332 Raten je 990€ sowie eine 333. Rate (irreguläre Schlussrate) mit geringerer Höhe.

Höhe dieser Rate = Höhe der Restschuld einen Monat nach Zahlung der 332. Rate:

$$R_{irr} = q_p^{333} \cdot 200.000€ - q_p \cdot \frac{q_p^{332} - 1}{q_p - 1} \cdot 990€ = 84,97€$$

Disagio

- Disagio (Abgeld, Damnum): Kreditgebühr
  [d.h. Zahlung wirkt nicht restschuldmindernd]
- Disagio wird von der Bank von der Kreditsumme einbehalten
- Kreditsumme = Anfangsschuld
- Auszahlung = Kreditsumme – Disagio

Bei Vermietung oder eigengewerblicher Nutzung eines Objekts ist das Disagio als Werbungskosten steuerlich absetzbar.

Beispiel

Kreditsumme	100.000€
Disagio	5%
Auszahlung	95% von 100.000€
	= 95.000€

Aber: Anfangsschuld beträgt 100.000€

Beispiel 5

Kredit mit Auszahlung 95.000€,

Rückzahlung von 55.000€ nach einem Jahr,

verbleibende Restschuld 50.000€.

Verwendeter Zinssatz i aus Gleichung

$$(1+i) \cdot 95.000€ = 105.000€$$

i = 0,1053 bzw. 10,53% p.a.

Beispiel 5 (Forts.)

Variante: Kreditsumme 100.000€ mit Disagio 5% führt ebenfalls auf Auszahlung 95.000€

Rückzahlung 55.000€ nach einem Jahr, verbleibende Restschuld 50.000€.

Verwendeter Zinssatz aus Gleichung

$$(1+i)\cdot 100.000€ = 105.000€$$

i = 0,0500 bzw. 5,00% p.a.

Beispiel 5 (Forts.)

	Kredit A	Kredit B
Kreditsumme	95.000€	100.000€
Auszahlung	**95.000€**	**95.000€** (Disagio 5%)
Zinssatz	10,53% p.a.	5,00% p.a.
Zahlung (1-mal)	**55.000€**	**55.000€**
Restschuld	**50.000€**	**50.000€**

Beispiel 6

- Kauf einer Immobilie; Eigenkapital 150.000€
- Teilfinanzierung über Kredit
- Maximale monatliche Belastung 500€
- Schuldenfrei nach höchstens 30 Jahren
- Angenommener Jahreszinssatz 4% p.a.
- Nebenkosten (Notar / Makler / Grundwerbsteuer): 9% des Kaufpreises
- Wie hoch darf der Kaufpreis sein?

Beispiel 6 / Kredithöhe

$q_p = 1 + \frac{0{,}04}{12}$ (US-Methode)

Rückzahlung durch 360-malige monatliche Rente mit Rate 500€

Kreditsumme (= Auszahlung) = Wert der Rente heute, also 360 Monate vor letzter Rate:

$$\frac{1}{q_p^{360}} \cdot \frac{q_p^{360} - 1}{q_p - 1} \cdot 500€ = 104.730{,}62€$$

Also: Rund 100.000€ über Kredit

Beispiel 6 / Max. Kaufpreis

- Gesamtkapital: 250.000€
- Kaufpreis P zzgl. 9% höchstens so groß wie das Gesamtkapital:

$$1{,}09 \cdot P = 250.000€$$

$$P = \frac{250.000€}{1{,}09} = 229.357{,}80€$$

- Die Immobilie darf nicht mehr als rund 230.000€ kosten.

Abschnitt 2

EFFEKTIVZINSSATZ

Effektivzinssatz

- Vorgelegt: Zahlungsstrom bestehend aus Ein- und Auszahlungen
- Vereinbart: Kontoführungsmethode (hier nur US oder ICMA, 30E/360)
- Der **Effektivzinssatz** des finanzmath. Vorgangs ist derjenige Jahreszinssatz, bei dem der Barwert des Zahlungsstroms genau 0€ beträgt.

Beispiel 7

Zahlungsstrom:

+1.000€ (jetzt), -600€ (nach ½ Jahr), -500€ (nach 1 Jahr)

Gesucht:

Effektivzinssatz nach ICMA bzw. nach US

Beispiel 7 / Anmerkung

Barwert bei US, ICMA gleich abgezinster Endwert (Wert am Tag der letzten Rate)

Also: Barwert beträgt genau dann 0€, wenn auch der Endwert 0€ beträgt.

Ansatzgleichung:
Endwert des Zahlungsstrom mit unbekanntem Zinssatz i beträgt 0€

Beispiel 7 / US

Halbjahreszahlungen, also $q_p = 1 + \frac{i}{2}$ mit unbekanntem Zinssatz i.

Ansatzgleichung:

$$q_p^2 \cdot 1.000€ - q_p \cdot 600€ - 500€ = 0€$$

Lösung: $q_p = 1{,}068114575$

Folgt: Effektivzinssatz (US) = 0,1362291496 bzw. 13,62% p.a.

Beispiel 7 / ICMA

Halbjahreszahlungen, also $q_p = \sqrt{1+i}$ mit unbekanntem Zinssatz i.

Ansatzgleichung:

$$q_p^2 \cdot 1.000€ - q_p \cdot 600€ - 500€ = 0€$$

Lösung: $q_p = 1{,}068114575$

Folgt: Effektivzinssatz (ICMA) = 0,14086… bzw. 14,09% p.a.

Umrechnungen

- Vorgelegt: Zahlungsstrom mit m Zahlungen pro Jahr
- Effektivzinssätze nach US / ICMA: $i_{eff,US}$, $i_{eff,ICMA}$
- Dann gilt (gleiche Ansatzgleichung!):

$$1 + \frac{i_{eff,US}}{m} = q_{p,US} = q_{p,ICMA} = \sqrt[m]{1 + i_{eff,ICMA}}$$

Umrechnungen (Forts.)

Aus der Gleichung

$$1+\frac{i_{eff,US}}{m}=\sqrt[m]{1+i_{eff,ICMA}}$$

erhalte

$$\boxed{\begin{aligned} i_{eff,US} &= m\cdot\left(\sqrt[m]{1+i_{eff,ICMA}}-1\right)\\ i_{eff,ICMA} &= \left(1+\frac{i_{eff,US}}{m}\right)^m-1\end{aligned}}$$

Effektiver Jahreszinssatz

Grundlage: Preisangabeverordnung (PAngV) in der Fassung von 2002, §6: Kredite und Anhang

Effektiver Jahreszinssatz eines Kredits = Effektivzinssatz nach ICMA des Zahlungsstroms der *tatsächlichen* Zahlungen (inkl. Gebührenzahlungen, vgl. PAngV, welche Gebühren einzurechnen sind).

Bestimmen des effektiven Jahreszinssatzes (PAngV)

1. Schritt: Bestimme nach Kreditvertrag sämtliche Zahlungen; diese Zahlungen bilden einen Zahlungsstrom. Vgl. PAngV, welche Gebühren einzubeziehen sind.
2. Schritt: Der effektive Jahreszinssatz (PAngV) ist der Effektivzinssatz nach ICMA des im 1. Schritt bestimmten Zahlungsstroms.
   Zinsmethode: Angepasste act/act-Methode

Beispiel 8

Zur Teilfinanzierung eines Investitionsobjekts (Airport Center, Projektbeginn 2011) nimmt die ausführende Gesellschaft einen Kredit zu den folgenden Konditionen auf:

- Kreditsumme 28 Mio.€
- Disagio 6%, Nominalzinssatz 4,25% p.a.
- Laufzeit 10 Jahre
- Abrechnung nach US mit monatlicher Zinsbuchung

Beispiel 8 (Forts.)

Als Rückzahlungen für diesen Kredit werden vereinbart:

- Jahr 1 – 2: tilgungsfrei
- Jahr 3 – 5: 0,5% anfängliche Tilgung
- Jahr 6 – 10: 1,0% anfängliche Tilgung

Die Tilgungssätze beziehen sich auf die Kreditsumme!

Bestimmen Sie den effektiven Jahreszinssatz nach PAngV.

Beispiel 8 / 1. Schritt

- Unterperiodischer Zinssatz (US)

$$i_p=\frac{0{,}0425}{12};\ q_p=1+i_p$$

- Auszahlung

$$A=0{,}94\cdot 28.000.000€=26.320.000€$$

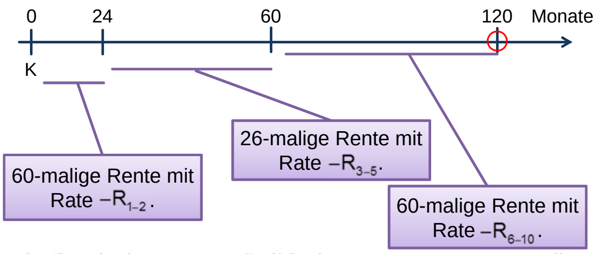
Dies ist der für PAngV relevante Betrag!

Beispiel 8 / 1. Schritt (Forts.)

- Zahlungen Jahr 1 – 2 (24 Raten):
  (nur die Monatszinsen werden gezahlt)
  $$R_{1-2} = i_p \cdot 28.000.000€ = 99.166,67€$$
- Zahlungen Jahr 3 – 5 (36 Raten):
  $$R_{3-5} = \frac{0,0425+0,0050}{12} \cdot 28.000.000€ = 110.833,33€$$
- Zahlungen Jahr 6 – 10 (60 Raten):
  $$R_{6-10} = \frac{0,0425+0,0100}{12} \cdot 28.000.000€ = 122.500,00€$$

Beispiel 8 / 1. Schritt (Forts.)

Restschuld am Ende der Laufzeit:
K = 28.000.000€ = Anfangschuld



Beispiel 8 / 1. Schritt (Forts.)

Restschuld nach 10 Jahren:

$$K_{Rest} = q_p^{120} \cdot K - q_p^{96} \cdot \frac{q_p^{24}-1}{q_p-1} \cdot R_{1-2}$$
$$-q_p^{60} \cdot \frac{q_p^{36}-1}{q_p-1} \cdot R_{3-5} - \frac{q_p^{60}-1}{q_p-1} \cdot R_{6-10}$$
$$= 25.890.427,86€$$

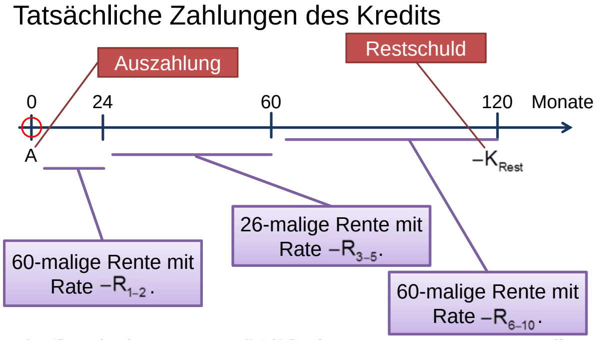
Beispiel 8 / 1. Schritt (Forts.)

Alternative Bestimmung der Restschuld:
(Restschuld nach 2 Jahren = Anfangsschuld)

$$K_{Rest} = q_p^{96} \cdot K - q_p^{60} \cdot \frac{q_p^{36}-1}{q_p-1} \cdot R_{3-5} - \frac{q_p^{60}-1}{q_p-1} \cdot R_{6-10}$$
$$= 25.890.427,86€$$

Beispiel 8 / 2. Schritt

Tatsächliche Zahlungen des Kredits



Beispiel 8 / 2. Schritt (Forts.)

- Gesucht: effektiver Jahreszinssatz i_{eff}
- Definiere monatlichen Aufzinsungsfaktor
  $$x = \sqrt[12]{1+i_{eff}}$$
- Stelle „Äquivalenzgleichung“ (Leistungen – Gegenleistungen = 0€) auf und löse diese nach x auf
- Anschließend berechne $i_{eff} = x^{12} - 1$

Beispiel 8 / Schritt 2 (Forts.)

Äquivalenzgleichung

$$0 = A - \frac{1}{x^{24}} \cdot \frac{x^{24}-1}{x-1} \cdot R_{1-2} - \frac{1}{x^{60}} \cdot \frac{x^{36}-1}{x-1} \cdot R_{3-4}$$
$$- \frac{1}{x^{120}} \cdot \frac{x^{60}-1}{x-1} \cdot R_{6-10} - \frac{1}{x^{120}} \cdot K_{Rest}$$

Hier ist in der Klausur Schluss!!!

Lösung per Rechner liefert effektiven Jahreszins 5,15% p.a.