

“Finanzmathematik” (TM/SRM/SM)  
Tutorium Finanzmathematik Teil 1

## 1 Zinseszinsrechnung

Bei den Aufgaben dieses Abschnitts erfolgt die Zinsverrechnung jährlich.

**Aufgabe 1.1:** Wir legen 1.000 € auf einem mit 5% p.a. verzinstem Konto an. Über welchen Betrag können unsere Großelkel in 100 Jahren verfügen, wenn auf dem Konto zwischenzeitlich weder eingezahlt noch abgehoben wurde?

**Aufgabe 1.2:** Wir nehmen einen Kredit über 2.500 € auf, den wir in 6 Jahren mit einer Einmalzahlung tilgen sollen. Wie hoch ist diese Zahlung, wenn als Zinssatz 7% p.a. vereinbart werden? Wie hoch ist die Zahlung bei 3, 5% p.a.?

**Aufgabe 1.3:** Wie hoch ist die heute ausbezahlte Kreditsumme bei einem mit 3% p.a. verzinsten Kredit, wenn die einzige Rückzahlung in 5 Jahren fällig ist und 100.000 € beträgt?

**Aufgabe 1.4:** Welchen Betrag müssen wir heute auf ein mit 3% p.a. verzinstes Konto einzahlen, wenn wir in 5 Jahren 100.000 € abheben wollen?

**Aufgabe 1.5:** In 12 Jahren ist bei einem mit 8% p.a. verzinstem Kredit eine Zahlung über 12.000 € fällig. Diese Schuld wollen wir bereits heute ablösen. Wie hoch muss dafür die Zahlung gewählt werden?

**Aufgabe 1.6:** Zur Anlage eines Kapitals von 10.000 € bieten sich uns zwei Möglichkeiten:

- I. Einzahlung der 10.000 € auf ein mit 3% p.a. verzinstes Konto.
- II. Einzahlung in einen mit 7% p.a. verzinsten Fonds; hierfür ist einmalig ein Gebühr von 3.000 € fällig.

Welche der beiden Möglichkeiten wählen wir, wenn der in 10 Jahren ersparte Betrag möglichst groß sein soll?

## 2 Zahlungsströme

**Aufgabe 2.1:** Stellen Sie den folgenden Zahlungsstrom auf einem Zeitstrahl dar:

1.000 € (heute), 3.000 € (in einem Jahr), 2.000 € (in 4 Jahren), 2.000 € (in 5 Jahren).

Bestimmen Sie bei einer Verzinsung mit 8% p.a. die Zeitwerte des Zahlungsstroms

- a. heute,
- b. am Tag der letzten Zahlung,
- c. zwei Jahre nach der letzten Zahlung, sowie

**Aufgabe 2.2:** Herr X. möchte auf einem mit 7% p.a. verzinstem Konto 10.000 € innerhalb von 4 Jahren ansparen. Hierzu möchte er zu Beginn des Sparzeitraums einen Einmalbetrag und anschließend am Ende jedes Jahres 1.500 € einzahlen. Wie hoch muss der Einmalbetrag gewählt werden, damit Herr X. sein Ziel erreicht?

**Aufgabe 2.3:** Eine mit 5% p.a. verzinsten Schuld von 50.000 € soll über 3 Jahre durch jährliche Zahlungen gleicher Höhe getilgt werden. Wie hoch muss hierzu die Rate sein?

## 3 US- und ICMA-Methode

**Aufgabe 3.1:** Der Stand eines mit 3% p.a. verzinsten Kontos (quartalsweise Zinsbuchung) betrug am 1.1.2012 genau 2.300,00 €. Anschließend wurden folgende Zahlungen gebucht:

Termin	1.4.12	1.7.12	1.10.12	1.1.13	1.4.13
Zahlung	-475 €	210 €	—	-380 €	—

Bestimmen Sie den Kontostand am 1.7.2013 nach der US-Methode und nach der ICMA-Methode.

**Aufgabe 3.2:** Sie wollen einen Kredit bei der Bank aufnehmen, den Sie durch vier halbjährliche Zahlungen je 50.000 € tilgen wollen. (Erste Rate ein halbes Jahr nach Kreditauszahlung.) Die Bank rechnet mit 7% p.a. nach der US-Methode. Wie hoch ist die Kreditsumme, wenn die Zinsbuchungen (a.) halbjährlich bzw. (b.) monatlich erfolgen?

**Aufgabe 3.3:** Herr Huber hat auf seinem Dachboden ein altes Gemälde gefunden und bietet dieses zwei Museen zum Kauf an. Das erste Museum ist bereit, Herrn Huber 2.500.000 € zu bezahlen. Das zweite Museum bietet zwei Zahlungen, nämlich 2.200.000 € sofort und 400.000 € nach 18 Monaten. Herr Huber kann Geld zu 6% p.a. risikofrei anlegen. Für welches Angebot soll er sich entscheiden? (Rechnung bei monatlicher Zinsbuchung nach der US-Methode.)

**Aufgabe 3.4:** Durch einen mit 4% p.a. verzinsten Sparplan sammelt Frau Habermas 1.500.000 € an; hierbei wird bei monatlicher Zinsbuchung nach der US-Methode gerechnet. Wie hoch ist der Endwert, wenn Frau Habermas 123 Monate vor dem Ende *zusätzlich* 100.000 € einzahlt? Wie hoch müsste diese Einzahlung sein, wenn sich das angesparte Vermögen auf 2.500.000 € belaufen soll?

**Aufgabe 3.5:** Ein Finanz-Taschenrechner (FTR) rechnet üblicherweise nach der US-Methode. Nun sollen Sie für Ihren Kunden den Endwert eines Zahlungsstroms bei monatlicher Zinsbuchung mit einem Zinssatz von 6% p.a. nach der ICMA-Methode bestimmen. Können Sie dies mit einem FTR?

**Aufgabe 3.6:** Bei einem Kredit über 28.000 € werden nach einem halben Jahr 5.000 €, nach einem Jahr 6.000 € und nach 1,5 Jahren 10.000 € zurückgezahlt. Die Bank rechnet nach der US-Methode mit einem Kreditzinssatz von 8% p.a. bei halbjährlicher Zinsbuchung.

- a. Wie hoch ist die verbleibende Restschuld am Ende der Laufzeit?
- b. Bei welchem Jahreszinssatz führt die ICMA-Methode auf die gleiche Restschuld? (Dieser Zinssatz wird *effektiver Jahreszinssatz* genannt.)

**Aufgabe 3.7:** Sie erhalten eine Rechnung über 20.000 €, die Sie entweder innerhalb von 8 Tagen abzüglich 2% Skonto (Überweisungsbetrag 19.600 €) oder innerhalb von 30 Tagen in voller Höhe bezahlen können. Da Sie derzeit knapp bei Kasse sind, erwägen Sie die beiden folgenden Möglichkeiten:

- 1: Sie zahlen am 8. Tag und nehmen hierzu einen Dispokredit über 19.600 € auf, den Sie am 30. Tag zurückzahlen. (Dispozins 11,76% p.a., nächste Zinsbuchung erfolgt am 30. Tag)
- 2: Sie zahlen am 30. Tag.
  - a. Für welche Möglichkeit entscheiden Sie sich?
  - b. Bei welchem Dispozins ist es egal, für welche Möglichkeit Sie sich entscheiden?
  - c. Welchen Zinssatz könnte man als „effektiven Jahreszinssatz“ dieses „Lieferantenkredits“ bezeichnen?

**Notiz:** Rechnen Sie hier mit der Zinsmethode 30E/360.

## 4 Rentenrechnung und Äquivalenzprinzip

**Aufgabe 4.1:** Bestimmen Sie die Zeitwerte einer 23-maligen halbjährlichen Rente mit Rate 5.000 € bei einem Zinssatz von 9% p.a. zum jeweils angegebenen Termin

- a. Zeitwert am Tag der letzten Rate, halbjährliche Zinsbuchung nach US.
- b. Zeitwert am Tag der letzten Rate, monatliche Zinsbuchung nach US.
- c. Zeitwert am Tag der letzten Rate, halbjährliche Zinsbuchung nach ICMA.
- d. Zeitwert am Tag der letzten Rate, monatliche Zinsbuchung nach ICMA.
- e. Zeitwert  $1\frac{3}{4}$  Jahre nach der letzten Rate, quartalsweise Zinsbuchung nach US.
- f. Zeitwert am Tag der ersten Rate, monatliche Zinsbuchung nach ICMA.
- g. Zeitwert zwei Jahre vor dem Tag der ersten Rate, quartalsweise Zinsbuchung nach US.

**Aufgabe 4.2:** Frau Y. zahlt für Ihre Altersvorsorge 10 Jahre monatlich 1.000 €, dann 10 Jahre monatlich 2.000 € und anschließend 10 Jahre monatlich 3.000 € auf ein mit 6% p.a. verzinstes Konto ein. Wie hoch ist der Kontostand 3 Jahre nach der letzten Rate, wenn das Konto bei monatlichen Zinsbuchungen nach der US-Methode abgerechnet wird?

**Aufgabe 4.3:** Ein mit 3% p.a. verzinsten Kredit über 50.000 € soll durch monatliche Raten gleicher Höhe innerhalb von 10 Jahren auf eine Restschuld von 15.000 € reduziert werden. Wie hoch müssen dazu die Raten sein? (Monatliche Zinsbuchung, Abrechnung nach US-Methode)

**Aufgabe 4.4:** Wir legen über 20 Jahre monatlich 1.000 € für unsere Altersvorsorge zurück. Die Zinssatz des Kontos (monatliche Zinsbuchung, US-Methode) beträgt in den ersten 6 Jahren mit 3% p.a., anschließend 8 Jahre 5% p.a. und für die restliche Laufzeit 4% p.a. Welches Vermögen haben wir am Tag der letzten Rate auf dem Konto?

**Aufgabe 4.5:** Mr. Shark kauft eine Fabrik für 1.100.000 €, die ihm durch moderne Ausbeutermethoden einen jährlichen Gewinn von 200.000 € erwirtschaftet. Nach 6 Jahren ist der Betrieb soweit heruntergewirtschaftet, dass Mr. Shark ihn für 100.000 € verkauft. Hat sich das Geschäft für Mr. Shark gelohnt, wenn er anderweitig eine Rendite von 9% p.a. hätte erzielen können?

## 5 Tilgungsrechnung

**Aufgabe 5.1:** Berechnen Sie die Restschuld bei den folgenden Krediten; die Rückzahlung erfolgt jeweils mit monatlichen Raten bei Abrechnung nach der US-Methode:

Kreditsumme	Sollzins	Tilgungssatz	Laufzeit
200.000 €	3, 1% p.a.	2%	10 Jahre
150.000 €	2, 8% p.a.	1%	15 Jahre
1.500 €	12% p.a.	10%	2 Jahre
75.000 €	4% p.a.	3%	9 Jahre

**Aufgabe 5.2:** Sie wollen sich ein Haus kaufen. Zur Vorbereitung Ihres Gespräches mit dem Makler haben Sie folgende Informationen ermittelt:

- Ihr für den Hauskauf erspartes Vermögen beläuft sich auf 120.000 €; den Rest finanzieren Sie über einen Kredit.
- Sie wollen monatlich höchstens 750 € zur Rückzahlung des Kredits aufbringen.
- Nach spätestens 30 Jahren wollen Sie schuldenfrei sein.
- Ihre Bank bietet Ihnen einen Kredit mit 2% Disagio und einem Sollzins von 3, 2% p.a. an. Die Rückzahlungen erfolgen monatlich über 30 Jahre; die Abrechnung erfolgt nach der US-Methode.
- Für die Kaufnebenkosten veranschlagen Sie 10% des Kaufpreises.

Wie hoch darf der Kaufpreis höchstens sein?

**Aufgabe 5.3:** Zur vollständigen Tilgung einer Schuld in Höhe von 100.000 € zahlen wir in einem Jahr 60.000 € und in zwei Jahren 70.000 €; weitere Zahlungen sind nicht vorgesehen. Welchen effektiven Jahreszinssatz müsste man für dieses Kreditgeschäft nach PAngV angeben?

**Aufgabe 5.4:** Vorgelegt ist ein Kredit über 120.000 € zu den folgenden Konditionen: Zinssatz 2, 6% p.a., Disagio 1%, sechs Jahre monatliche Raten je 500 €, anschließend vier Jahre monatliche Raten je 400 €, Abrechnung nach der US-Methode. Bestimmen Sie die Restschuld des Kredits und stellen Sie die Gleichung zur Ermittlung des effektiven Jahreszinssatzes nach PAngV auf. Wie ändert sich die Restschuld, wenn in den ersten 5 Jahren am Ende jeden Quartals zusätzlich 150 € gezahlt werden?

## 6 Klausurvorbereitung: Tilgungsrechnung

Wir nehmen einen Annuitätenkredit über 500.000 € auf; der Sollzins beträgt 4,6% p.a. bei monatlicher Zinsbuchung nach der US-Methode. Wir vereinbaren 2% als anfängliche Tilgung sowie 20 Jahre Laufzeit.

- A1:** Definieren Sie den Begriff „Annuitätenkredit“.
- A2:** Bestimmen Sie die monatlich zu zahlende Rate.
- A3:** Welchen Monatszinssatz müssen Sie nehmen?
- A4:** Wie hoch ist die Restschuld am Ende der Laufzeit.
- A5:** Stellen Sie die erste Zeile des Tilgungsplans auf.
- A6:** *Berechnen* Sie den effektiven Jahreszinssatz nach PAngV. Begründen Sie Ihr Vorgehen.

Die nächsten Aufgaben behandeln Variationen des Kredits. Nicht genannte Daten bleiben dabei jeweils wie oben vereinbart.

- A7:** Herr K. behauptet, dass sich der Tilgungssatz bei doppelter Monatsrate ebenfalls verdoppelt. Legen Sie dar, warum dies falsch ist, und bestimmen Sie den tatsächlichen Tilgungssatz.
- A8:** Wie hoch muss die monatliche Rate gewählt werden, wenn der Kredit in den 20 Jahren restlos getilgt werden soll? Welchem Tilgungssatz entspricht das?
- A9:** Wie hoch müsste die Kreditsumme gewählt werden, damit bei einem Disagio von 3% die Auszahlung ebenfalls 500.000 € beträgt? Ändert sich hierdurch die Restschuld?
- A10:** Neben einem Disagio von 1,8% verlangt die Bank noch Kreditgebühren in Höhe von 100 € je Halbjahr. Stellen Sie die Gleichung zur Bestimmung des effektiven Jahreszinssatzes nach PAngV auf; Sie müssen diese Gleichung nicht lösen (und sollten dies auch nicht versuchen).
- A11:** Wie ändert sich die Restschuld, wenn Sie Sondertilgungen in Höhe von 10.000 € nach 5 Jahren und 50.000 € nach 12 Jahren leisten? Begründen Sie Ihre Rechnung!
- A12:** Mit welchem Monatszinssatz müssen Sie nach der ICMA-Methode rechnen?
- A13:** Sie vereinbaren quartalsweise Zinsbuchungen bei *monatlichen* Raten zu 3.000 €. Welche Restschuld ergibt sich?
- A14:** Nennen Sie zwei unterschiedliche Zinsmethoden. Bestimmen Sie für eine hiervon den zeitlichen Abstand zwischen dem 1.1.2013 und dem 31.3.2013.
- A15:** Wie hoch wäre Ihre Schuld nach 20 Jahren *ohne* jede Zahlung ihrerseits?
- A16:** Über welchen Betrag könnten Sie den Kredit abschließen, wenn Sie mit Monatsraten von 3.000 € den Kredit innerhalb von 30 Jahren vollständig tilgen wollen?

## 7 Klausurvorbereitung: Investitionsrechnung

Ihre Firma beabsichtigt eine Investition mit den folgenden Einnahmen und Ausgaben:

Zeitpunkt	Ausgaben	Einnahmen
heute	600.000 €	—
in einem Jahr	150.000 €	500.000 €
in zwei Jahren	250.000 €	600.000 €

- B1:** Bestimmen Sie den Zahlungsstrom der Rückflüsse und begründen Sie, dass es sich um eine Normalinvestition handelt.
- B3:** Bestimmen Sie den Kapitalwert der Investition, wobei Sie mit einem Kalkulationszinssatz von 5% p.a. rechnen. Wie kann man den Kapitalwert interpretieren?
- B3:** Wie hoch müssen die *Einnahmen* im zweiten Jahre mindestens sein, damit die Investition bei einem Kalkulationszinssatz von 5% p.a. nicht nachteilig ist?
- B4:** Bestimmen Sie den internen Zinssatz der Investition. Bewerten Sie die Investition unter der Annahme, dass diese vollständig fremdfinanziert ist und der Kreditzinssatz 9% p.a. beträgt.
- B5:** Die Spot-Raten am Geld- und Kapitalmarkt betragen 6% p.a. für ein Jahr und 8% p.a. für zwei Jahre. Berechnen Sie den Kapitalwert für diese Situation.
- B6:** Zur genaueren Analyse rechnen Sie mit den folgenden *monatlichen* Rückflüssen:  
– 600.000 € (heute), anschließend monatlich +20.000 € (insgesamt 24-mal, erste Rate nach einem Monat), zusätzlich +27.500 € pro Quartal (insgesamt 8-mal, erste Rate nach zwei Monaten).  
Sie rechnen mit 6% p.a. als Kalkulationszinssatz sowie mit der US-Methode bei monatlicher Zinsbuchung. Welchen Monatszinssatz müssen Sie nehmen? Welchen Kapitalwert erhalten Sie?

## 8 Klausurvorbereitung: Sparpläne, Wertpapiere

**Sparpläne** Frau Schmittlhuber möchte zur Altersvorsorge Geld ansparen: 5 Jahre lang monatlich 500 €, 2 Jahre keine Zahlung, 15 Jahre 1.000 € monatlich, 15 Jahre 700 € monatlich. Wir rechnen jeweils mit Stichtag = Tag der letzten Rate; die Abrechnung erfolgt mit der US-Methode. Rechnen Sie mit einem Zinssatz von 8% p.a.

- C1:** Wie hoch ist die angesparte Summe?
- C2:** Welche monatliche Rente könnte Frau Schmittlhuber aus dem angesparten Vermögen 20 Jahre entnehmen, wenn in der Auszahlungsphase mit 5% p.a. verzinst wird?
- C3:** Nach wie vielen Monaten wäre das Vermögen aufgebraucht, wenn monatlich 10.000 € ausgezahlt werden? (Erneut erfolgt die Verzinsung in der Auszahlungsphase mit 5% p.a.)
- C4:** Wie hoch ist die angesparte Summe, wenn Frau Schmittlhuber nach 12 Jahren 10.000 € aus dem bis dahin angesparten Vermögen entnimmt?
- C5:** Wie hoch müsste die monatliche Rate in den ersten fünf Jahren gewählt werden, wenn 2.000.000 € angespart werden sollen?
- C6:** Wie hoch wäre das Endvermögen, wenn der Zinssatz in den letzten 15 Jahren auf 10% p.a. steigt?

**Wertpapiere** Alle Wertpapiere haben eine jährliche Kuponzahlung sowie einen Nennwert von 100 €.

- D1:** Bestimmen Sie bei einer Rendite von 3% p.a. den Preis eines Wertpapiers (Kupon 6, Rücknahme zum Nennwert) mit einer Restlaufzeit von 6 Jahren und 4 Monaten. Mit welchem Kurs wird dieses Papier an der Börse notiert?
- D2:** Der Börsenkurs eines Wertpapiers (Kupon 10, Rücknahme zu 75) beträgt 9 Jahre und 2 Monate vor dem Ende der Laufzeit 110. Welcher Preis ist für das Papier zu zahlen?
- D3:** Am Wertpapiermarkt werden die folgenden drei Papiere gehandelt:
- Zerobond A mit Laufzeit 1 Jahr, Rücknahme zu 101, Rendite 1% p.a.
  - Bond B mit Laufzeit 2 Jahre, Kupon 20, Rücknahme zu 80, Rendite 2% p.a.
  - Bond C mit Laufzeit 3 Jahre, Kupon 10, Rücknahme zu 90, Preis 110,65.
- (a) Bestimmen Sie die spot rates  $r_{01}$ ,  $r_{02}$ ,  $r_{03}$ .
- (b) Welche Rendite hat eine Anlage aus 2 Zerobonds und 4-mal Bond B?
- (c) Die Anlageform D bietet die folgenden Konditionen: In einem Jahr zahlen Sie 100 €, und in zwei Jahren erhalten Sie einen gewissen Betrag  $Z$ . Wie muss  $Z$  gewählt werden, wenn Arbitrage-Gewinne ausgeschlossen werden sollen?