

Finanzmathematik

Prof. Dr. Harald Löwe
VL Ostfalia
Sommersemester 2012

1. Kapitel

KONTEN

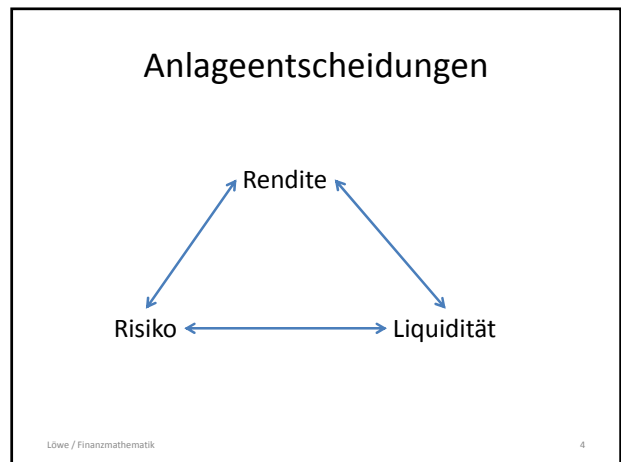
Löwe / Finanzmathematik

Wozu Zinsen?

Zinsen werden erhoben

- zum Inflationsausgleich
- zum Ausgleich des Liquiditätsverlusts
- als Risikoprämie
- zur Gewinnerzielung

Löwe / Finanzmathematik



Beispiel 1

Tagesgeldkonto

- Zinssatz 2,75% p.a.
- Zinsbuchung jährlich
- Einzahlung 20.000€ zum Jahresbeginn
- Kontostand 20.550€ nach einem Jahr.

(Barclays, 13/03/12)

Löwe / Finanzmathematik

Rechnung zu Beispiel 1

- Kontostand nach einem Jahr:
20.000€ zzgl. 2,75% Zinsen, also
 $1,0275 \times 20.000\text{€} = 20.550\text{€}$
- Kontostand nach zwei Jahren:
20.550€ zzgl. 2,75% Zinsen, also
 $1,0275 \times 20.550\text{€} = 21.115,13\text{€}$
- Alternativrechnung:
 $1,0275^2 \times 20.000\text{€} = 21.115,13\text{€}$

Löwe / Finanzmathematik

Rechnung zu Beispiel 1 (Forts.)

- Zinsen im 1. Jahr: 550€
(2,75% von 20.000€)
- Zinsen im zweiten Jahr: 565,13€, aufgeteilt:
 - 550,00€ = 2,75% von 20.000€
 - 15,13€ = 2,75% von 550€
(Zinseszinsen)

Rechnung zu Beispiel 1 (Forts.)

- Nach **einem** Jahr:
 $1,0275^1 \cdot 20.000€ = 20.550,00€$
- Nach **zwei** Jahren:
 $1,0275^2 \cdot 20.000€ = 21.115,13€$
- Nach **drei** Jahren:
 $1,0275^3 \cdot 20.000€ = 21.695,79€$
- usw.

Beispiel 2

- 2,75% p.a., Zinsbuchung quartalsweise
- Einzahlung 20.000€ zum Jahresbeginn
- Kontostand 20.555,70€ nach einem Jahr
- Warum???

Quelle: <http://finanzen.testsieger.de/tagesgeld/>

Rechnung zu Beispiel 2

- Zinsen für ein Jahr: 2,75% = 0,0275
- Zinsen für ein Quartal
 $\frac{2,75\%}{4} = \frac{0,0275}{4} = 0,006875 = 0,6875\%$
- Merke: Bei quartalsweiser Zinsbuchung entsprechen 2,75% p.a. einem Quartalszinssatz von $\frac{2,75\%}{4} = 0,6875\%$

Rechnung zu Beispiel 2 (Forts.)

- Kontostand nach einem Quartal:
 $\left(1 + \frac{0,0275}{4}\right) \cdot 20.000€ = 20.137,50€$
- Kontostand nach **vier** Quartalen = 1 Jahr:
 $\left(1 + \frac{0,0275}{4}\right)^4 \cdot 20.000€ = 20.555,70€$

Rechnung zu Beispiel 2 (Forts.)

- Kontostand nach **7** Quartalen:
 $\left(1 + \frac{0,0275}{4}\right)^7 \cdot 20.000€ = 20.982,58€$
-

Beispiel 3

- Volkswagenbank Tagesgeldkonto
- Jahreszinssatz 2,00% p.a.
(Stand 03/11)
- Zinsbuchung monatlich
- Einzahlung 20.000€
- Kontostand nach einem Jahr:

$$\left(1 + \frac{0,02}{12}\right)^{12} \cdot 20.000\text{€} = 20.403,69\text{€}$$

Löwe / Finanzmathematik

13

Beispiel 4 (Kontenabrechnung)

- Jahreszinssatz 4% p.a.
- Zinsbuchung zu Jahresbeginn (1.1.)
- Einzahlungen: 1.000€ am 26.01.2012
- Gesucht: Kontostand am 01.01.2013

Löwe / Finanzmathematik

14

Beispiel 4 (Forts.)

- Vom 26.01.2012 bis zum 01.01.2013:
Kontostand 1.000€
- Wie viel Zinsen werden hierfür fällig?
- Δt = Zeit zwischen 26.01.12 und 01.01.13 *in Jahren*
- Zinsen: $\Delta t \times 0,04 \times 1.000\text{€}$
- Wie groß ist Δt ?
- So nicht zu beantworten!

Löwe / Finanzmathematik

15

Deutsche Zinsmethode 30E/360

- Einsatz in Deutschland:
Sparbücher, Termingelder
- 1 Jahr = 360 Tage
1 Monat = 30 Tage
- 31. eines Monats = 30. des Monats
- Berechnung in Excel durch
`TAGE360(Datum1;Datum2;WAHR)/360`

Löwe / Finanzmathematik

16

26.01.-04.03. bei 30E/360

- 26.01.12 – 01.02.12: 5 Tage
(der 31.01. zählt nicht mit!)
- 01.02.12 – 01.03.12: 11×30 Tage
(jeder Monat hat 30 Tage)
- Gesamt: 26.01.12 – 01.01.13 = 335 Tage
- Zinsen: $\frac{335}{360} \cdot 0,04 \cdot 1.000\text{€} = 37,22\text{€}$

Löwe / Finanzmathematik

17

Englische Zinsmethode act/365

- Einsatz in Deutschland:
Geldmarktpapier
- Tage werden kalendergenau gezählt
- 1 Jahr = 365 Tage
(auch Schaltjahre)
- Berechnung in Excel durch
`(Datum2 - Datum1)/365`

Löwe / Finanzmathematik

18

26.01.-04.03. bei act/365

- 26.01.12 – 01.01.13: 341 Tage (kalendergenau)
- Zinsen: $\frac{341}{365} \cdot 0,04 \cdot 1.000\text{€} = 37,37\text{€}$

Löwe / Finanzmathematik

19

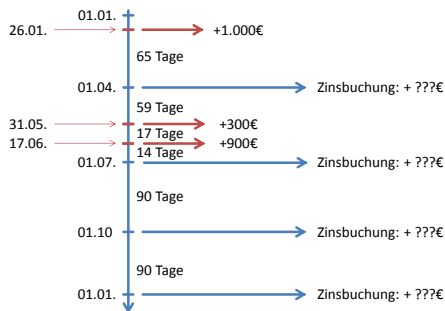
Beispiel 5: Kontenabrechnung

- Jahreszinssatz 4% p.a.
- Zinsbuchung zu Quartalsbeginn (01.01. / 01.04. / 01.07. / 01.10.)
- Zinsmethode 30/360
- Einzahlungen:
 - 1.000€ am 26.01.2012
 - 300€ am 31.05.2012
 - 900€ am 17.06.2012
- Gesucht: Kontostand am 01.01.2013

Löwe / Finanzmathematik

20

Beispiel 5 / Rechnung



Löwe / Finanzmathematik

21

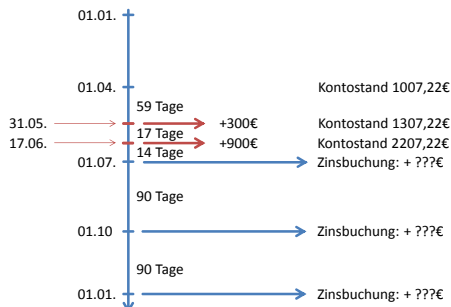
Beispiel 5 / Rechnung (Forts.)

- Abrechnung zum Zinsbuchungstermin 1.4.:
 - 1.000€ vom 26.01. bis 01.04. = 65 Tage
 - Zinsen $\frac{65}{360} \cdot 0,04 \cdot 1.000\text{€} = 7,22\text{€}$
- Neuer Kontostand 1.4.2012: 1.007,22€

Löwe / Finanzmathematik

22

Beispiel 5 / Rechnung (Forts.)



Löwe / Finanzmathematik

23

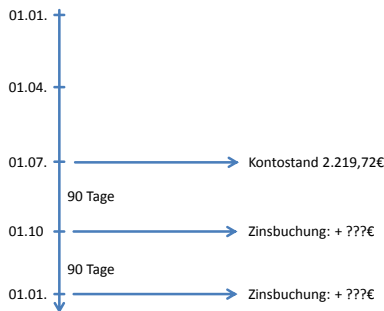
Beispiel 5 / Rechnung (Forts.)

- Zinsbuchung am 1.7.:
 - 59 Tage 1.007,22€; Zinsen $\frac{59}{360} \cdot 0,04 \cdot 1.007,22\text{€} = 6,60\text{€}$
 - 17 Tage 1.307,22€; Zinsen $\frac{17}{360} \cdot 0,04 \cdot 1.307,22\text{€} = 2,47\text{€}$
 - 14 Tage 2.207,22€; Zinsen $\frac{14}{360} \cdot 0,04 \cdot 2.207,22\text{€} = 3,43\text{€}$
- Neuer Kontostand 1.7.2012: $2.207,22\text{€} + 6,60\text{€} + 2,47\text{€} + 3,43\text{€} = 2.219,72\text{€}$

Löwe / Finanzmathematik

24

Beispiel 5 / Rechnung (Forts.)



Löwe / Finanzmathematik

25

Beispiel 5 / Rechnung (Forts.)

- Zinsbuchung am 1.10.:
 - 2.219,72€ zzgl. 1 Quartal Zinsen
$$\left(1 + \frac{90}{360} \cdot 0,04\right) \cdot 2.219,72 = \left(1 + \frac{0,04}{4}\right) \cdot 2.219,72 = 2.241,92€$$
- Neuer Kontostand 1.10.2012: 2.227,12€
- Zinsbuchung am 1.1.2013:
 - 2.227,12€ zzgl. 1 Quartal Zinsen
$$\left(1 + \frac{0,04}{4}\right) \cdot 2.241,92€ = 2.264,34€$$

Löwe / Finanzmathematik

26

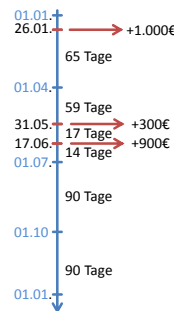
Beispiel 5 / Tabellenkalkulation

Zinssatz:		4%			
Kontenabrechnung					
Termin	Tage	Zinsen	Zahlung	Zinsbuchung	Kontostand
26.01.2012			1.000,00 €		1.000,00 €
01.04.2012	65	7,22 €	0,00 €	7,22 €	1.007,22 €
31.05.2012	59	6,60 €	300,00 €		1.307,22 €
17.06.2012	17	2,47 €	900,00 €		2.207,22 €
01.07.2012	14	3,43 €	0,00 €	12,51 €	2.219,73 €
01.10.2012	90	22,20 €	0,00 €	22,20 €	2.241,93 €
01.01.2013	90	22,42 €	0,00 €	22,42 €	2.264,34 €

Löwe / Finanzmathematik

27

Beispiel 5 / Rechnung 2



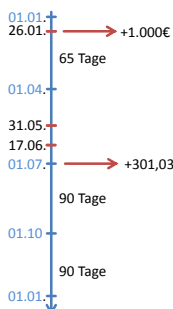
- Idee: Betrachte Zahlung von 300€ am 31.05.
- Bis zur nächsten Zinsbuchung vergehen 17 + 14 = 31 Tage.
- 300€ zzgl. Zinsen für 31 Tage:

$$\left(1 + \frac{31}{360} \cdot 0,04\right) \cdot 300€ = 301,03€$$
- Ersetze 300€ (31.05.) durch 301,03€ (01.07.)
⇒ gleicher Endkontenstand

Löwe / Finanzmathematik

28

Beispiel 5 / Rechnung 2 (Forts.)



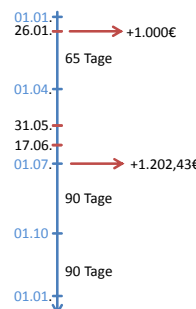
- Ersetze 900€ (17.06.) durch 900€ zzgl. 14 Tage Zinsen (01.07.):

$$\left(1 + \frac{14}{360} \cdot 0,04\right) \cdot 900€ = 901,40€$$

Löwe / Finanzmathematik

29

Beispiel 5 / Rechnung 2 (Forts.)



- Ersetze 900€ (17.06.) durch 900€ zzgl. 14 Tage Zinsen (01.07.):

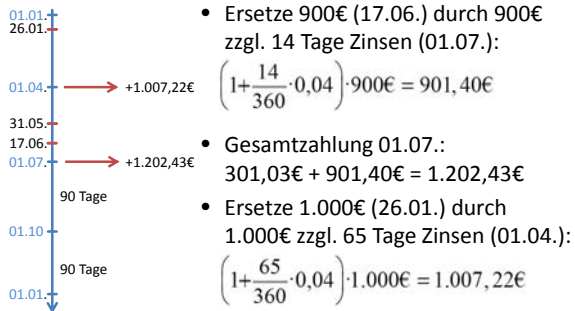
$$\left(1 + \frac{14}{360} \cdot 0,04\right) \cdot 900€ = 901,40€$$
- Gesamtzahlung 01.07.:

$$301,03€ + 901,40€ = 1.202,43€$$

Löwe / Finanzmathematik

30

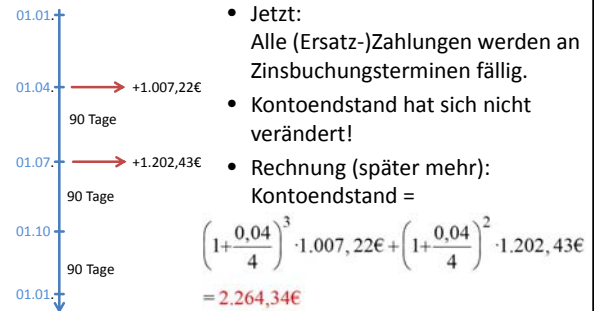
Beispiel 5 / Rechnung 2 (Forts.)



Löwe / Finanzmathematik

31

Beispiel 5 / Rechnung 2 (Forts.)



Löwe / Finanzmathematik

32

Kontenabrechnung

- Vorgelegt
 - Konto mit festen Zinsbuchungsterminen
 - Ein- / Auszahlungen
 - Jahreszinssatz $p\%$ p.a.; Zinsmethode
 - Stichtag = Zinsbuchungstermin; sämtliche Zahlungen müssen vor diesem Stichtag erfolgen
- Gesucht: Kontenendstand am Stichtag
- Vorbereitung: Berechne $i = p/100$
- Ziel: Ersetzen aller Zahlungen durch „Ersatzzahlungen“ an Zinsbuchungsterminen

Löwe / Finanzmathematik

33

Kontenabrechnung (Forts.)

- Für jede Zahlung A , die nicht auf einem Zinsbuchungstermin fällig ist,
 - bestimme die Zeit Δt [in Jahren] bis zum **nächsten** Zinsbuchungstermin; Zinsmethode beachten!
 - berechne A zzgl. Zinsen $A_{\text{neu}} = (1 + \Delta t \cdot i) \cdot A$
 - Die Zahlung von A_{neu} am nächsten Zinsbuchungstermin **ersetzt** A , ohne dass sich der Endkontostand ändert

Löwe / Finanzmathematik

34

Kontenabrechnung (Forts.)

Nach diesen Vorarbeiten:

- Alle Ersatzzahlungen liegen auf Zinsbuchungsterminen
- Gesamtwert aller Zahlungen (Kontoendstand) bleibt gleich
- Ermittlung des Gesamtwerts der Ersatzzahlungen mit Hilfe der Methoden aus Kapitel 2 ff.

Löwe / Finanzmathematik

35

Beispiel 6

Sie wollen Ihren Lottogewinn von 10.000€ für 5 Jahre anlegen und, weil Sie schon mal dabei sind, auch gleich noch 250€ monatlich ansparen. Um über den Sparbetrag jederzeit verfügen zu können, entscheiden Sie sich für ein Tagesgeldkonto mit den folgenden Konditionen: Zinssatz 2,23% p.a., quartalsweise Zinsbuchung, deutsche Zinsmethode, erste Einzahlung zum 1.4.12.

Wie hoch ist der Kontostand nach 5 Jahren?

Löwe / Finanzmathematik

36

Beispiel 6: AKBANK Tagesgeld

<http://www.akbank.de/rechner.aspx>
Stand: 15/03/12

Beispiel 6 (Forts.)

$11.176,08€ + 15.880,46€ = 27.056,54€$
Anfangsbetrag und mtl. Zahlungen
können getrennt behandelt werden!
[0,01€ Differenz: Rundungsfehler]

Beispiel 6 (Forts.)

Beitrag der 10.000€ zum Kontoendstand:

$$\left(1 + \frac{0,0223}{4}\right)^1 \cdot 10.000€ = 10.055,75€ \quad \text{zzgl. 1 Quartal Zinsen}$$

$$\left(1 + \frac{0,0223}{4}\right)^2 \cdot 10.000€ = 10.111,81€ \quad \text{zzgl. 2 Quartale Zinsen}$$

$$\left(1 + \frac{0,0223}{4}\right)^3 \cdot 10.000€ = 10.168,18€ \quad \text{zzgl. 3 Quartale Zinsen}$$

...

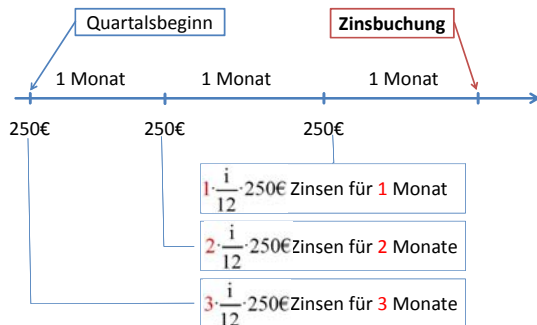
$$\left(1 + \frac{0,0223}{4}\right)^{20} \cdot 10.000€ = 11.176,08€ \quad \text{zzgl. 20 Quartale Zinsen}$$

5 Jahre = 5 x 4 = 20 Quartale

Beispiel 6 (Forts.)

- Monatliche Zahlungen
 - je 250€
 - zu Monatsbeginn
 - über 5 Jahre, also 5 x 12 = 60 Zahlungen
- Die Zahlungen bilden eine **vorschüssige 60-malige monatliche Rente mit Rate 250€**
- Betrachte zunächst nur Zahlungen in einem Quartal

Beispiel 6 (Forts.)



Beispiel 6 (Forts.)

• Zahlungen im Quartal 1, 2 und 3 Monate vor Quartalsende
 • Hierfür gibt es 1-, 2- und 3-mal den Monatszins $\frac{i}{12} \cdot 250€$, insgesamt $1+2+3 = 6$ -mal
 • Buchung am Ende des Quartals $\left(3 + 6 \cdot \frac{i}{12}\right) \cdot 250€$

Beispiel 6 (Forts.)

Ersetze die Zahlungen in einem Quartal durch eine Einmalzahlung am Quartalsende in Höhe von

$$\left(3 + 6 \cdot \frac{0,0223}{12}\right) \cdot 250\text{€} = 752,79\text{€}$$

Labels in the diagram: 3 Zahlungen, Jahreszins 2,23% p.a., 1 + 2 + 3 Monate Zinsen, Monatszinsen, Gleiche Zahlungen je 250€

Löwe / Finanzmathematik 43

Beispiel 6 (Forts.)

Diese Ersatzzahlungen führen auf den gleichen Endkontostand!

Ziel erreicht:
Alle Zahlungen liegen auf Zinsbuchungsterminen.
Jetzt Behandlung mit den Methoden aus Kapitel 2.

Alternative: FTR (FinanzTaschenRechner); z.B. HP 10BII

Löwe / Finanzmathematik 44

Beispiel 6 (FTR)

Löwe / Finanzmathematik 45

2. Kapitel ZINSESZINSRECHNUNG

Löwe / Finanzmathematik 46

Löwe / Finanzmathematik 47